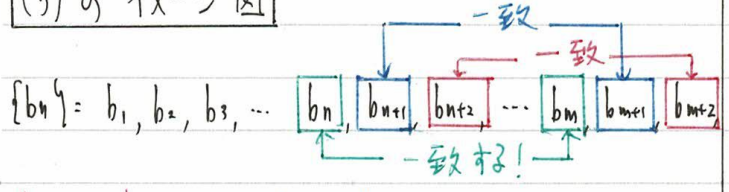


2014年 東大数学 理系第5問

(3) のイ-ジ図



$b_{n+2} = b_{m+2}$  から  $b_{n+1} = b_{m+1}$   
 反しては

$b_n = b_m$

2連続の余りが一致するところがあれば、その前も一致する。

$l-k+1 \geq 2$  より  $b_{l-k+1} > 0$  となる。

$b_1 > 0$

よって  $b_1$  は  $P$  で割りやうな数字で、  
 $a_1$  は  $D$  で割りやうな数字。

(4)  $0 < b_n < P$  ( $n \geq 2$ ) であるから、  
 $(b_{n+1}, b_{n+2})$  の組み合わせは、

- |             |             |             |     |                   |
|-------------|-------------|-------------|-----|-------------------|
| (1.1)       | (1.2)       | (1.3)       | ... | (1. $P-1$ )       |
| (2.1)       | (2.2)       | (2.3)       | ... | (2. $P-1$ )       |
| (3.1)       | (3.2)       | (3.3)       | ... | (3. $P-1$ )       |
| ⋮           | ⋮           |             |     | ⋮                 |
| ( $P-1$ .1) | ( $P-1$ .2) | ( $P-1$ .3) | ... | ( $P-1$ , $P-1$ ) |

の  $(P-1)^2$  通り以下しかない。

従って、必ず1組は、  
数列  $\{b_n\}$  は無限個あり、  
 $(b_{n+1}, b_{n+2})$  は有限個 ( $(P-1)^2$  個) となる。

$(b_{k+1}, b_{k+2}) = (b_{k+2}, b_{k+2})$  となる場合がある。  
 (但し、 $1 \leq k < l$ ) 鳩の巣原理から  
 必ず1度は2連続で一致するものがある。

すると、(3)の結果から  $b_k = b_l$  が成立する。

これを繰り返すと、

最終的には  $b_1 = b_{l-k+1}$  となる。

(3)より  $n \geq 2$  で  $b_n > 0$  が成立し、