2014年　東大数学　理系第5問

(3)のイメージ図

一致
一致

$\{b_n\} = b_1, b_2, b_3, \cdots \boxed{b_n}, \boxed{b_{n+1}}, \boxed{b_{n+2}} \cdots \boxed{b_m}, \boxed{b_{m+1}}, \boxed{b_{m+2}}$

一致する！

$b_{n+2} = b_{m+2}$ かつ $b_{n+1} = b_{m+1}$

ならば

$b_n = b_m$

2連続で余りが
一致するところが
あれば
その前も一致する。

(4) $0 < b_n < p$ $(n \geqq 2)$ であるから、
(b_{n+1}, b_{n+2}) の組み合わせは、

$$
\begin{array}{ccccc}
(1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \cdots & (1, p-1) \\
(2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \cdots & (2, p-1) \\
(3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \ddots & (3, p-1) \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
(p-1, 1) & (p-1, 2) & (p-1, 3) & \cdots & (p-1, p-1)
\end{array}
$$

の $(p-1)^2$ 通り以下しかない。

数列 $\{b_n\}$ は無限個あり
(b_{n+1}, b_{n+2}) は有限個 $((p-1)^2$ 個$)$
なので、

従って、必ず1組は、
$(b_{k+1}, b_{l+1}) = (b_{k+2}, b_{l+2})$ となる場合がある。
(但し、$1 \leqq k < l$)

鳩の巣原理から
必ず1度は2連続で
一致するものがある。

すると、(3)の結果から $b_k = b_l$ が成立する。

これを繰り返すと、
最終的には $b_1 = b_{l-k+1}$ となるが、
(3)より $n \geqq 2$ で $b_n > 0$ が成立し、
…

$l-k+1 \geqq 2$ より $b_{l-k+1} > 0$ なので、

$b_1 > 0$

よって、b_1 は p で割り切れないので
a_1 は p で割り切れない。